Д. Х. Зайнетдинов, И. Ш. Калимуллин

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

damir.zh@mail.ru, Iskander.Kalimullin@ksu.ru

О НЕКОТОРЫХ ГРУППОВЫХ СВОЙСТВАХ ПРИМИТИВНО РЕКУРСИВНЫХ ПЕРЕСТАНОВОК

Мы будем рассматривать группу $\mathcal{C}$ всех вычислимых перестановок на ω и класс $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$ всех примитивно рекурсивных перестановок. Пусть $\langle\mathcal{P}\rangle$ это наименьшая подгруппа, содержащая $\mathcal{P}$.

Для каждого $n > 0$ определим подклассы $\mathcal{P}_n^+$ и $\mathcal{P}_n^-$ из подгруппы $\langle\mathcal{P}\rangle$ следующим образом:

$$\mathcal{P}_n^+ = \{\pi_1\pi_2^{-1}\pi_3\ldots\pi_n^{(-1)^{n+1}} : \pi_1,\ldots,\pi_n \in \mathcal{P}\};$$

$$\mathcal{P}_n^- = \{\pi_1^{-1}\pi_2\pi_3^{-1}\ldots\pi_n^{(-1)^{n}} : \pi_1,\ldots,\pi_n \in \mathcal{P}\}.$$

Для любого $n \geqslant 1$ $\mathcal{P}_n^+$ есть класс всех “суперпозиций длины, не большей n” перестановок, принадлежащих $\mathcal{P}_1^+ \cup \mathcal{P}_1^-$, из которых записанная слева принадлежит $\mathcal{P}_1^+$.

Ясно, что $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1^+$, $\mathcal{P}_n^+ \cup \mathcal{P}_n^- \subseteq \mathcal{P}_{n+1}^+ \cap \mathcal{P}_{n+1}^-$ для всех n. Также выполнены следующие равенства:

для нечётных n: $\{p^{-1}|\ p \in \mathcal{P}_n^+\} = \mathcal{P}_n^-$ & $\{p^{-1}|\ p \in \mathcal{P}_n^-\} = \mathcal{P}_n^+$

для чётных n : $\{p^{-1}|\ p \in \mathcal{P}_n^+\} = \mathcal{P}_n^+$ & $\{p^{-1}|\ p \in \mathcal{P}_n^-\} = \mathcal{P}_n^-$

Графиком перестановки p будем называть следующее множество:

$$\operatorname{graph} p = \{\langle x, y\rangle : y = p(x)\}.$$

Задача, которую в [2] рассмотрел В. В. Козьминых, состояла в том, чтобы проверить условие $(\mathcal{P}_{k+1}^+ \cap \mathcal{P}_{k+1}^-)/(\mathcal{P}_k^+ \cup \mathcal{P}_k^-) \neq \emptyset$

для любого $k = \overline{1,5}$, т. е. установить, существует ли примитивно рекурсивная перестановка $q \in (\mathcal{P}^+_{k+1} \cap \mathcal{P}^-_{k+1})/(\mathcal{P}^+_k \cup \mathcal{P}^-_k)$. Для решения этой задачи В. В. Козьминых для каждого класса $\mathcal{P}^+_k$ и $\mathcal{P}^-_k$ построил свой критерий принадлежности к нему примитивно рекурсивных перестановок.

Мы, в свою очередь, хотим усилить этот результат и построить вычислимую перестановку q с условием $q^2 = e$. Тогда наша задача разбивается на два случая:

1) При $k = 2n$ достаточно построить вычислимую перестановку q такую, что, $q \in \mathcal{P}^+_{2n+1}/(\mathcal{P}^+_{2n} \cup \mathcal{P}^-_{2n})$ для $n = 1, 2$.

2) При $k = 2n+1$ надо построить вычислимую перестановку q такую, что $q \in (\mathcal{P}^+_{2n+2} \cap \mathcal{P}^-_{2n+2})/\mathcal{P}^+_{2n+1}$ для $n = \overline{0,2}$.

Полученные результаты для $k = 1, 2$ можно сформулировать в виде следующих двух теорем. (Случаи $k = \overline{3,5}$ исследуются в настоящее время).

Теорема 1. *Существует вычислимая перестановка* $q \in (\mathcal{P}^+_2 \cap \mathcal{P}^-_2)/(\mathcal{P}^+_1 \cup \mathcal{P}^-_1)$ *такая, что* $q^2 = e$.

Лемма 1. *Существует перестановка* p, *такая, что* $\operatorname{graph} p$ *является примитивно рекурсивным и* $p \neq \alpha_i(x)$, *где* $\{\alpha_i\}_{i\in\omega}$ *является вычислимой нумерацией всех примитивно рекурсивных функций.*

Теорема 2. *Существует вычислимая перестановка* $q \in (\mathcal{P}^+_3 \cap \mathcal{P}^-_3)/(\mathcal{P}^+_2 \cup \mathcal{P}^-_2)$ *такая, что* $q^2 = e$.

Для доказательства этой теоремы используются следующие две леммы:

Лемма 2. *Существует вычислимая перестановка* $p \in \mathcal{P}^+_2/\mathcal{P}^-_2$ *такая, что* $p^2 = e$.

Лемма 3. *Существует вычислимая перестановка* $r \in \in \mathcal{P}_2^-/\mathcal{P}_2^+$ *такая, что* $r^2 = e$.

И. Ш. Калимуллин в своей статье [1] поставил вопрос: возможно ли перенести результаты, полученные в [2], на случай перестановок, вычислимых за полиномиальное время.

В полиномиальном случае для каждого $n > 0$ определим подклассы $\mathcal{P}ol_n^+$ и $\mathcal{P}ol_n^-$ перестановок, вычислимых за полиномиальное время следующим образом:

$$\mathcal{P}ol_n^+ = \{\pi_1\pi_2^{-1}\pi_3\dots\pi_n^{(-1)^{n+1}} : \pi_1,\dots,\pi_n \in \mathcal{P}ol\};$$

$$\mathcal{P}ol_n^- = \{\pi_1^{-1}\pi_2\pi_3^{-1}\dots\pi_n^{(-1)^{n}} : \pi_1,\dots,\pi_n \in \mathcal{P}ol\}.$$

В [1] было доказано, что для каждой вычислимой перестановки p существуют вычислимые за полиномиальное время перестановки π_i, где $1 \leqslant i \leqslant 3$, такие, что $p = \pi_1\pi_2^{-1}\pi_3\pi_1^{-1}\pi_2\pi_1^{-1}$. Также в [1] были найдены критерии в полиномиальном случае для классов $\mathcal{P}ol_2^+$ и $\mathcal{P}ol_2^-$.

На данном этапе исследования стоит проблема нахождения критериев принадлежности перестановок, вычислимых за полиномиальное время, к остальным классам $\mathcal{P}ol_k^+$ и $\mathcal{P}ol_k^-$ из иерархии вычислимых перестановок. Тогда станет возможным построение иерархии групп вычислимых перестановок в полиномиальном случае.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 12-01-31389, 12-01-97008) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных - докторов наук МД-4838.2013.1.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Kalimullin I. Sh. *On primitive recursive permutations* // In: Cooper S.B., Goncharov S.S. eds. Computability and models. New

York, NY: Kluwer Academic/Plenum Publishers. – 2003. – P. 249–258.

2. Козьминых В. В. *О представлении частично рекурсивных функций в виде суперпозиций* // Алгебра и логика. – 1972. – Т. 11. – № 3. – С. 270–294.

3. Соар Р. И. *Вычислимо перечислимые множества и степени: Изучение вычислимых функций и вычислимо перечисляемых множеств : пер. с англ. / Р. И. Соар.* – Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2000. – 576 с.

Н. В. Зайцева

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

queen-natalya@mail.ru

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Рассматривается смешанная задача для B-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода и доказывается единственность ее решения.

Пусть $D = \{(x,t)|0 < x < l, 0 < t < T\}$ – прямоугольная область в координатной плоскости Oxt.

В области D рассмотрим B-гиперболическое уравнение

$$\Box_B u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - B_x u = 0, \qquad (1)$$

где $B_x = x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}(x^k\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{x}\frac{\partial}{\partial x}$ – оператор Бесселя.